

Непрерывные проекторы Маудера, теорема о неподвижной точке Маудера

Непр. оп-р $A(x): X \rightarrow X$ наз-ся вполне непр., if A непр. и компактный (т.е. переводит $\forall$ оп. мн-во в предкомпактное)

$\square A \subset X, A$ - замкн. и опр. $\Rightarrow A(A)$ - предкомп. (т.е. $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ конечная ε -сеть, т.е. $\exists y_1, \dots, y_n \in A(A)$ и $A(A) \subset \bigcup_{k=1}^n B(y_k, \varepsilon)$ - шар с центр. в y_k и радиусом ε)

Введем ε -проектор Маудера $A_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{k=1}^n g_k(x) y_k}{(\sum_{k=1}^n g_k(x)) \neq 0}$, где $g_k(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|A(x) - y_k\|, & \text{if } \|A(x) - y_k\| < \varepsilon, \\ 0, & \text{if } \|A(x) - y_k\| \geq \varepsilon \end{cases}$

Лемма $\|A_\varepsilon(x) - A(x)\| < \varepsilon, \forall x \in A$

$$\left\| \frac{\sum_{k=1}^n g_k(x) y_k}{\sum_{k=1}^n g_k(x)} - A(x) \right\| = \left\| \frac{\sum_{k=1}^n g_k(x) (y_k - A(x))}{\sum_{k=1}^n g_k(x)} \right\| \leq \frac{\sum_{k=1}^n g_k(x) \|y_k - A(x)\|}{\sum_{k=1}^n g_k(x)} \leq \varepsilon$$

$\Downarrow$ (Маудера) $\square A$ - замкн., вып., опр. обл-ть, $A \subset X$ - банах, $A(x): X \rightarrow X, A(x)$ - вполне непр. (как непр. оп-р). Тогда $\exists x \in A: A(x) = x$.

1) Предположим, что нет неподвижн. т. $\Rightarrow \exists \varepsilon_0 > 0: \|A(x) - x\| \geq \varepsilon_0, \forall x \in A$. $\square$ такого ε_0 . $\neg \exists \Rightarrow \exists x_n \in A: \|A(x_n) - x_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, x_n \in A \Rightarrow \{x_n\}$ - опр. $\Rightarrow A(x)$ - вполне непр. $\Rightarrow A(x_n)$ - предкомпакт. $\Rightarrow \exists A(x_{n_k}) \xrightarrow{k \rightarrow \infty}$ (предкомпакт. $\Rightarrow$ можно выделить с-ся n /послед-ть)

Но $\|A(x_{n_k}) - x_{n_k}\| \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$ и $x_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} x \in A \Rightarrow A(x) = x = x$ (!?), что такого ε_0 . $\neg \exists \Rightarrow \exists \varepsilon_0$.

2) $\square 0 \notin A$. Возьмем $\forall x_0 \in A: \tilde{x} = x - x_0 \Rightarrow A\tilde{x} = A(x - x_0) = A(x) - x_0 = A(\tilde{x} + x_0) - x_0, A: \tilde{D} \rightarrow A$, где $\tilde{D} = A - x_0 = \{x - x_0 | x \in A\}$

$\square \exists$ неподвижн. т. $\tilde{x} \in \tilde{D}: A\tilde{x} = \tilde{x} \Rightarrow A\tilde{x} = A(\tilde{x} + x_0) - x_0 = A(x) - x_0$; с другой стороны, $A\tilde{x} = \tilde{x} = x - x_0$

$\Rightarrow A(x) - x_0 = x - x_0, A(x) = x \Rightarrow \exists$ неподвижн. т. уже у оп-ра A . $0 \in \tilde{D} \Rightarrow$, не опр. обл-ти, считаем, что $0 \in A$

3) Возьмем $\varepsilon: 0 < \varepsilon < \varepsilon_0$.

$\square y_1, \dots, y_n$ - ε -сеть $A(A)$, т.е. $A(A) \subset \bigcup_{k=1}^n B(y_k, \varepsilon)$

Введем $K_\varepsilon = C_0(y_1, \dots, y_n, 0) \in A$

$\square$ в банах пр-ве X задано мн-во M и конечного числа эл-тов: $M = \{x_i \in X, i=1, n\}$. Мн-во всевозможн. л/к $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i$, где все $\alpha_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$, наз-ся вып. оболочкой мн-ва M . Обозн: $C_0(M)$

Среди y_k ЛО лин/завис $\Rightarrow \exists y_1, \dots, y_m$ — лин/нез ($m \leq n$)
 Введем $N_\varepsilon = C_0(y_1, \dots, y_m, 0)$. Известно, что N_ε содержит
 внутр. т. ($\forall N_\varepsilon \subset K_\varepsilon$) $\Rightarrow K_\varepsilon$ содержит внутр. т.
 Заметим, что $A_\varepsilon: K_\varepsilon \rightarrow K_\varepsilon$ (т.к. $A_\varepsilon(x) \in K_\varepsilon$). Известно, что
 K_ε — замкн., выпук., вып. и содержит внутр. т., A_ε — непр. $\Leftrightarrow$

∇ (Обобщ. ∇ Шаурера) ∇A — замкн., вып., ор. п/ин-во
 X^n (конечномер. пр-во), содержит хотя бы 1 внутр. т., и ∇
 $f(x)$ непр. отображает A в A . Тогда $\exists$ неподвижн. т. $f(x) = x$,
 $x \in A$

$\Rightarrow$ по обобщ. ∇ Шаурера $\Rightarrow \exists x_\varepsilon \in K_\varepsilon: A_\varepsilon(x_\varepsilon) = x_\varepsilon$
 Тогда $\varepsilon_0 \leq \|x_\varepsilon - A(x_\varepsilon)\| = \|A_\varepsilon(x_\varepsilon) - A(x_\varepsilon)\| = \|A_\varepsilon(x_\varepsilon) - A_\varepsilon(A(x_\varepsilon))\| =$
 $= \|A_\varepsilon(x_\varepsilon) - A_\varepsilon(A_\varepsilon(x_\varepsilon))\| < \varepsilon$ пред. лемма $\} < \varepsilon$
 М.е. $\varepsilon_0 < \varepsilon \Rightarrow$ (1?), т.к. $0 < \varepsilon < \varepsilon_0 \Rightarrow$ (1?) стел, что у A нет
 неподвижн. т. ■